第２講　図形と方程式

1　放物線 $y=x^2$ の上に２点 P，Q があって，線分 PQ の中点が直線 $y=x+1$ の上にあるとき，このような直線 PQ は，すべてある一定の放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接することを示し，a，b，c の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる3点 $\mathrm{P}(a,\ a^2-2)$, $\mathrm{Q}(b,\ b^2-2)$, $\mathrm{R}(c,\ c^2-2)$ がある．原点を中心とする半径1の円を S とし，直線PQ，直線PRはそれぞれ S に接するとする．

(1) 線分QRの中点の座標を a を用いて表せ．

(2) 直線QRもまた S に接することを証明せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　点Pを通る直線に関して円 $x^2+y^2=1$ を対称に移動させたところ，この円が x 軸に接した．このような点Pの存在範囲を図示せよ．

[2]　放物線 $y=-\frac{1}{3}x^2$ を，その頂点がいつも放物線 $y=x^2$ の上にあるように平行移動させる．こうして得られるどの放物線も通らない範囲を求め，図示せよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

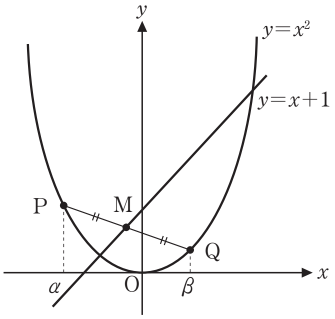
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　図形と方程式

$\boxed{1}$ 放物線 $y=x^2$ の上に２点 P，Q があって，線分 PQ の中点が直線 $y=x+1$ の上にあるとき，このような直線PQ は，すべてある一定の放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接することを示し，a，b，c の値を求めよ．

P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると

線分 PQ の中点は，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ と表すことができる．



これが $y=x+1$ 上にあるとき

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}+1 \text{ より } (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha+\beta+2 \cdots\cdots ①$$

直線 PQ：$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$ より $y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta \cdots\cdots ②$

ここで，$\alpha+\beta=t$ とおくと，①より $\alpha\beta=\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)$

よって，α，β は２次方程式　$X^2-tX+\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)=0$　の２解である．

α，β は実数より，この式の判別式を D とすると

$$D=t^2-4\cdot\frac{1}{2}(t^2-t-2)\geqq 0 \qquad t^2-2t-4\leqq 0 \qquad \text{よって}\quad 1-\sqrt{5}\leqq t\leqq 1+\sqrt{5} \cdots\cdots ③$$

また，②より　$y=tx-\dfrac{1}{2}(t^2-t-2)$

これが $y=ax^2+bx+c$ と接するのは，この２式より y を消去し，x について整理した式

$$2ax^2+2(b-t)x+2c+t^2-t-2=0$$

が重解をもつときである．

したがって　$(b-t)^2-2a(2c+t^2-t-2)=0$

$$(1-2a)t^2+2(a-b)t+b^2-4a(c-1)=0$$

この式が③を満たすすべての t で成り立つのは

$$1-2a=0 \quad \text{かつ} \quad a-b=0 \quad \text{かつ} \quad b^2-4a(c-1)=0$$

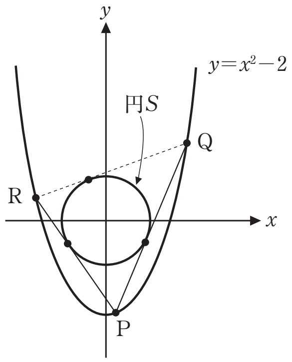
つまり，$a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{9}{8}$ のときであり，このとき直線PQ は放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接する．

よって　$\boldsymbol{a=b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{9}{8}}$

2 放物線 $y=x^2-2$ 上に相異なる 3 点 $\mathrm{P}(a, a^2-2)$，$\mathrm{Q}(b, b^2-2)$，$\mathrm{R}(c, c^2-2)$ がある．原点を中心とする半径 1 の円を S とし，直線 PQ，直線 PR はそれぞれ S に接するとする．

(1) 線分 QR の中点の座標を a を用いて表せ．

(2) 直線 QR もまた S に接することを証明せよ．



(1) 直線 PQ：$y=\dfrac{(b^2-2)-(a^2-2)}{b-a}(x-a)+a^2-2$

$$=(a+b)x-ab-2$$

したがって　$(a+b)x-y-ab-2=0$

これが円 S：$x^2+y^2=1$ に接するとき

$$\frac{|ab+2|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1 \quad \text{より} \quad |ab+2|=\sqrt{(a+b)^2+1}$$

$$(ab+2)^2=(a+b)^2+1$$

$$(a^2-1)b^2+2ab+3-a^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

同様に，直線 PR が円 S に接するとき，b を c に替えて $(a^2-1)c^2+2ac+3-a^2=0$ ……②

①，②より b，c は x の 2 次方程式

$(a^2-1)x^2+2ax+3-a^2=0$　の異なる 2 解である．よって，$a\neq\pm1$

解と係数の関係より $b+c=-\dfrac{2a}{a^2-1}$，$bc=\dfrac{3-a^2}{a^2-1}$

したがって，線分 QR の中点の

x 座標は　$\dfrac{b+c}{2}=-\dfrac{a}{a^2-1}$

y 座標は　$\dfrac{b^2+c^2-4}{2}=\dfrac{(b+c)^2-2bc-4}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{(a^2-1)^2}-2\cdot\frac{3-a^2}{a^2-1}-4\right)$$

$$=\frac{-a^4+2a^2+1}{(a^2-1)^2}=\frac{2}{(a^2-1)^2}-1$$

よって　$\left(-\dfrac{a}{a^2-1},\ \dfrac{2}{(a^2-1)^2}-1\right)$

(2) 直線 QR：$(b+c)x-y-bc-2=0$ と円 S の中心 $(0, 0)$ との距離は

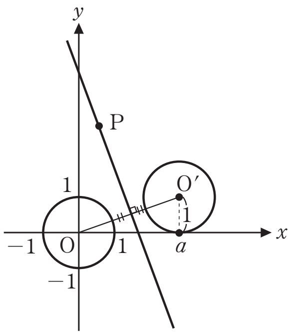
$$\frac{|bc+2|}{\sqrt{(b+c)^2+1}}=\frac{\left|\dfrac{3-a^2}{a^2-1}+2\right|}{\sqrt{\dfrac{4a^2}{(a^2-1)^2}+1}}=\frac{\left|\dfrac{a^2+1}{a^2-1}\right|}{\sqrt{\dfrac{(a^2-1)^2+4a^2}{(a^2-1)^2}}}=\frac{\dfrac{|a^2+1|}{|a^2-1|}}{\dfrac{\sqrt{(a^2+1)^2}}{|a^2-1|}}=\frac{|a^2+1|}{|a^2+1|}=1$$

となり，QR も S に接する．よって，示された．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　[1]　点Pを通る直線に関して円 $x^2+y^2=1$ を対称に移動させたところ，この円が x 軸に接した．このような点Pの存在範囲を図示せよ．

移動後の円の中心を $\mathrm{O}'(a,\ \pm1)$ とおくと，点Pは線分 OO' の垂直二等分線上にある．



OO' の中点は $\left(\dfrac{a}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$　$\overrightarrow{\mathrm{OO}'}=(a,\pm1)$

よって，OO' の垂直二等分線：$a\cdot\left(x-\dfrac{a}{2}\right)\pm1\cdot\left(y\mp\dfrac{1}{2}\right)=0$

（複号同順）

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)\pm y-\frac{1}{2}=0$$

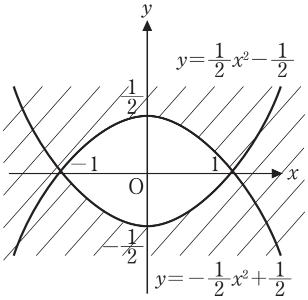
この上に $\mathrm{P}(X,\ Y)$ があるとき

$$a\left(X-\frac{a}{2}\right)\pm Y-\frac{1}{2}=0\qquad a^2-2Xa+(1\mp2Y)\geqq0$$

これを満たす実数 a が存在するのは　$X^2-(1\mp2Y)\geqq0$ のとき

つまり　$Y\geqq-\dfrac{1}{2}X^2+\dfrac{1}{2}$，$Y\leqq\dfrac{1}{2}X^2-\dfrac{1}{2}$

よって，求める存在範囲は右図斜線部分（境界含む）



3　[2]　放物線 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ を，その頂点がいつも放物線 $y=x^2$ の上にあるように平行移動させる．こうして得られるどの放物線も通らない範囲を求め，図示せよ．

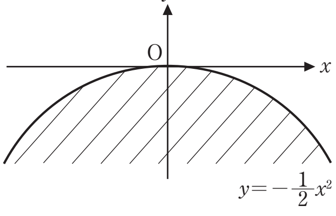
移動後の頂点の座標を $(t,\ t^2)$ とすると，放物線は $y=-\dfrac{1}{3}(x-t)^2+t^2$ と表せる．

これを変形して　$2t^2+2xt-(x^2+3y)=0$

この式を満たす実数 t が存在しないのは　$x^2+2(x^2+3y)<0$　つまり　$\boldsymbol{y<-\dfrac{1}{2}x^2}$ のとき

これが求める範囲である．

よって，求める範囲は下図斜線部分（境界含まない）



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 a を正の定数とする．放物線 P：$y=ax^2$ 上の動点 A を中心とし x 軸に接する円を C とする．動点 A が放物線 P 上のすべての点を動くとき，座標平面上で $y>0$ の表す領域において，どの円 C の内部にも含まれない点がある．この点の集まりを図示せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$　より

$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，この考え方を定着させよう．

この２式は，直線 $\frac{1}{2}x+ty=1$ が点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 m の方程式は $\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

２点を通る直線はただ１通りに表すことができる．よって，この２接点を通る直線はここで求めたもの以外にはないことがわかる．

(2)　$x+2ty-2=0$　より　$(x-2)+2yt=0$

これが（$t>1$ の）任意の実数 t で成立するための条件は　$x-2=0$　かつ　$2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず m は **定点 (2，0)** を通る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を正の定数とする．放物線 P：$y=ax^2$ 上の動点Aを中心とし x 軸に接する円を C とする．動点Aが放物線 P 上のすべての点を動くとき，座標平面上で $y>0$ の表す領域において，どの円 C の内部にも含まれない点がある．この点の集まりを図示せよ．

解答例

題意より，円 C の中心を $\mathrm{C}(t,\ at^2)$ とおくと半径は $at^2(>0)$

円 C の内部の点は

$(x-t)^2+(y-at^2)^2<a^2t^4$　より

$(2ay-1)t^2+2xt-(x^2+y^2)>0$ を満たす．

t が存在しないときの x，y の条件は，この不等式を満たさない x，y の条件である．つまりそのときの (x, y) は円 C の内部に含まれない（円 C の周上および外部にある）点を表す．

よって，この式を満たす実数 t が存在しないような x，y の範囲を求める．

$f(t)=(2ay-1)t^2+2xt-(x^2+y^2)$ とおく．

(i)　$2ay-1=0$ のとき

$f(t)=2xt-(x^2+y^2)$

$x=0$ のとき　$f(t)=0\cdot t-(0^2+y^2)>0$

これを満たす t は存在しない．このとき $y=\dfrac{1}{2a}$

$x\neq 0$ のとき　$f(t)>0$ は t の1次不等式となり，これを満たす t は存在し不適．

(ii)　$2ay-1\neq 0$ のとき

$f(t)$ は2次関数である．よって，$f(t)>0$ を満たす実数 t が存在しない条件は

$$\begin{cases} 2ay-1<0 & \cdots\cdots① \\ x^2+(2ay-1)(x^2+y^2)\leqq 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より　$y<\dfrac{1}{2a}$

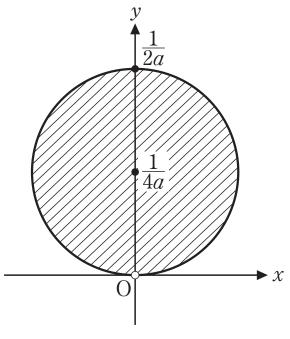
②より　$2ayx^2+(2ay-1)y^2\leqq 0$

$2ax^2+(2ay-1)y\leqq 0$　($y>0$ より)

よって　$x^2+\left(y-\dfrac{1}{4a}\right)^2\leqq\dfrac{1}{16a^2}$

(i)(ii)より，求める点の集合は右図の斜線部分．

（境界は原点を含まず他を含む）



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。